Title	球面上の電場は定義すべきか
Author(s)	北野, 正雄
Citation	大学の物理教育 (2007), 13(1): 45-48
Issue Date	2007-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/26712
Right	著作権は、日本物理学会に帰属する。
Type	Journal Article
Textversion	author; none

球面上の電場は定義すべきか

北野正雄　京都大学大学院工学研究科

1　はじめに

「半径 a の（無限に薄い）球面上に電荷 Q が一様に分布するとき, 球の中心 O から距離 r の点 P の電場 $E(r)$ を求めよ」という電磁気学の典型的な問題の解が,

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ (a/r)^2 E_{\mathrm{out}} & (r > a) \end{cases} \tag{1}$$

であることはよく知られている. ここで, E_{out} は面電荷密度 $\sigma = Q/4\pi a^2$ と真空の誘電率 ε_0 を用いて, $E_{\mathrm{out}} = \sigma/\varepsilon_0$ と書ける. 球のすぐ外側の電場は $E(a+0) = E_{\mathrm{out}}$ になっている. 球面上（$r = a$）では電場の値が不連続であり, そこでの値は決められないと一般に考えられている. しかし, 文献 [1] は, この値が $E(a) = E_{\mathrm{out}}/2$ と一意的に定めることができるとし, 教科書でも取り上げるべきであると結論づけている. この議論を承けて発表された論文 [2] は単純な積分計算では $E(a) = E_{\mathrm{out}}/2$ が得られるが, ガウスの法則を満たさないので, 実際には E_{out} と考えるべきだと主張している. 一方, 論文 [3),4] は基本的に, 球面上での電場を $E_{\mathrm{out}}/2$ と明記することを支持しており, 教育的にも好ましいとしている. これに伴って生ずるガウスの法則との矛盾に関しても, 解消方法が提案されている.

本稿では, “球面上の電場” を決めようとするこれらの試みには, 数学的にも物理的にも本質的な困難が伴うことを明らかにする. 一般に知られているように, 球殻が無限に薄い場合には, 電場は不連続になるので, そこでの値を定めることには無理があり, 2 つの極限値 $E(a+0) = E_{\mathrm{out}}$, $E(a-0) = 0$ しか定めることはできない. それにもかかわらず, 敢えて球面上での電場の値を $E(a) = E_{\mathrm{out}}/2$ と定める主要な根拠として, 表面に働く面積あたりの電気力が $p = \sigma E_{\mathrm{out}}/2$ であることがあげられている. しかし, この推論には飛躍があり正当なものとは言えない. 以下では, “球面上の電場” が本質的に定義しえない量であることを明らかにする.

2　有限厚さの球殻

有限厚さの球殻に電荷が分布している場合の電場をまず求めよう. 半径 a の無限に薄い理想球面を内側と外側に向けてそれぞれ $d\,(\ll a)$ の厚みをもたせる. 電荷分布を極座標で表すと

$$\varrho(r) = \sigma g_d(r - a) \tag{2}$$

と書ける. $g_d(x)$ は厚さ方向の電荷の分布を表すもので, 区間 $[-d, d]$ の外で $g_d(x) = 0$,

$$\int_{-d}^{d} g_d(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{3}$$

を満たす関数である. さらに, その原始関数

$$U_d(x) = \int_{-\infty}^{x} g_d(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4}$$

を定義しておく. $U_d(x \le -d) = 0$, $U_d(x \ge d) = 1$ であることに注意する.

なお, $g_d(x)$ は上記の条件をみたせば, どのような形のものであってもよい. $d \to 0$ とする過程で形状に関する情報は失われ, 面積が 1 であるという性質 (3) だけが残り, デルタ関数と見なせるようになるからである. 現実問題としては $d \to 0$ という操作を行うわけではなく, 関心のあるスケール L（球の

半径や電場測定の分解能）に対して $d \ll L$ が成り立っている場合に, $g_d(x)$ をデルタ関数 $\delta(x)$ で置き換えて, 具体的な形に依存する量や性質を捨てるのである．たとえば, 国際宇宙ステーションのような不規則な形状の物体でも,「質点」として近似的にデルタ関数で表すことができる．デルタ関数 $\delta(x)$ を通常の関数 $g_d(x)$ の族（あるいは列）として扱う方法 [5] はこのような問題において威力を発揮する．

電場 $\boldsymbol{E}$ は $\mathrm{div}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) = \varrho$ を満たすが, 球対称性を仮定して, これを極座標で表すと

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 E(r)\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} g_d(r-a). \tag{5}$$

ただし, E は電場の r-成分を表す．これより,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 E(r)\right) \sim a^2 \frac{\sigma}{\varepsilon_0} g_d(r-a), \tag{6}$$

が得られる．$g_d(r-a)$ は $r = a$ の近傍でのみ 0 でない値を持つので, 右辺の因子 r^2 を a^2 で置き換えても差し支えない．これを積分すると

$$E(r) = E_{\mathrm{out}} \left(\frac{a}{r}\right)^2 U_d(r-a) \tag{7}$$

が得られる．ただし, $E(0) = 0$ を用いた．この電場が任意の閉曲面に対して, ガウスの法則を満たすことはいうまでもない．球殻の外表面では $E(a+d) \sim E_{\mathrm{out}}$, 内表面では $E(a-d) = 0$ と定まる．一方, 球殻内部での電場は, 電荷分布の形 $g_d(x)$ に依存する．

極限 $d \to 0$ において, "球面上の電場" を与えるものの候補として, とりあえず, 球殻中央での電場 $E(a)$ と球殻内部の電場の平均 $\bar{E}$ を考える;

$$\bar{E} = \frac{1}{2d}\int_{a-d}^{a+d} E(r)\mathrm{d}r. \tag{8}$$

電荷の分布が対称な場合, すなわち $g_d(-x) = g_d(x)$ の場合に, $E(a) = \bar{E} = E_{\mathrm{out}}/2$ が成り立つことは簡単に確かめられる．$U_d(x) = (1/2) + u_d(x)$ とおくと, $u_d(x)$ が反対称, $u_d(-x) = -u_d(x)$ になることを用いればよい．関係 (9) は, 球面上の電場を $E_{\mathrm{out}}/2$ とする根拠になりうる．しかし, このような電荷分布の (内外) 対称性は, もとの問題設定には含まれない, 過剰な条件であることに注意しなければならない．球対称性以外に, このような付加的な対称性を暗黙に仮定するのは, デルタ関数への極限をとる過程において, $g_d(x)$ の形や d に依存しないロバスト (robust) な性質や量だけを残すという原則に反している．現実問題としても, 導体内部の電場は厚さ方向に一様ではないので, 電荷分布が対称になる保証はない．したがって, 一般に $E(a) \neq E_{\mathrm{out}}/2$, $\bar{E} \neq E_{\mathrm{out}}/2$ であり, 球面上の電場を $E_{\mathrm{out}}/2$ とする根拠は失われている．

ただし, 文献 [1] の 1 番目の例題である無限平面 $(z = 0)$ の問題の場合には, z の正負に関する鏡面対称性を仮定して, $E(0) = \bar{E} = 0$ が成り立っていると考えることもできる．例外的に面上の電場を定義しても構わない状況になっている．しかし, 外部電場が存在して電荷分布の面対称性が破れている場合には, $E(0) = \bar{E} = 0$ とすることには無理があるだろう．文献 [3] の最後の式, $\int_0^\infty \delta(x)\mathrm{d}x = 1/2$ も注意が必要な式で, 必ずしも一般的に成り立つものではない [7]．典型的な例外は原点におかれたデルタ関数を球座標で表す場合である．この場合は引数 r の定義域が $[0, \infty)$ であるという特殊事情が効いている．

3　球面に働く力

球面に働く面積あたりの力 (圧力; 外向き正) p は厚みに対する積分として表される;

$$\begin{aligned} p &= \int_{a-d}^{a+d} \varrho(r)E(r)\mathrm{d}r \sim \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\int_{-d}^{d} g_d(x)U_d(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\int_{-d}^{d}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[U_d(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\left.[U_d(x)]^2\right|_{-d}^{d} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \sigma E_{\mathrm{out}}/2. \end{aligned} \tag{9}$$

近似 $a^2/r^2 \sim 1$ を用いた．このように面に働く力は分布 $g_d(x)$ の具体的な形には依存せず, 球殻の厚さ全体からの寄与として求められる．因子 (1/2) は,

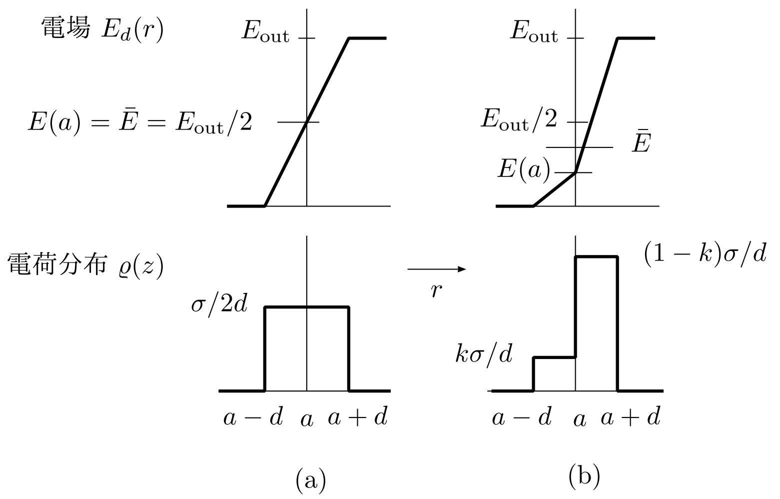

図 1: 電荷分布が (a) 対称の場合 ($k=1/2$) と (b) 非対称な場合 ($k=0.2\neq 1/2$) の電場の様子．(b) の場合, 平均電場 $\bar{E}$ も中央での電場 $E(a)$ も $E_{\rm out}/2$ とは異なっている．しかし面に働く力はいずれの場合も $\sigma E_{\rm out}/2$ である．d を 0 に近づけてもこの事実は変わらない．

$g_d(x)$ が $U_d(x)$ の微分であるという性質だけによるものである．

特定の一点での電場や平均電場 $\bar{E}$ が p に寄与しているのではないことに注意する．例えば, $\varrho(r)$ が球殻内で一定であれば, 式 (9) は $p=\varrho\int E{\rm d}r=\sigma\bar{E}$ と表せるが, このような仮定は一般に成り立たない．したがって, 式 (9) を根拠に "球面上の電場" が $E_{\rm out}/2$ であると結論づけるのは拙速である．なお, 式 (9) の終盤に現れる $(\sigma U_d(x))^2/2\varepsilon_0\sim\varepsilon_0(E(r))^2/2$ はマクスウェルの応力に対応している．被積分関数が応力の勾配になっているので, 積分の結果, 両端での応力の差が面に働く力となるのである．したがって, この結果は, $p=\varepsilon_0(E_{\rm out}^2-E_{\rm in}^2)/2=\sigma(E_{\rm out}+E_{\rm in})/2$ と一般化できる [1]．

4　球面上の電場の不定性

面に働く圧力 p や球殻のすぐ外側の電場 $E(a+d)$ は, d や電荷の厚さ方向の分布 $g_d(x)$ には依存しない安定（ロバスト）な量であるが, 球殻内の各点の電場や平均値 $\bar{E}$ はそれらに依存する不定な量である．例を用いて具体的に示そう．非対称電荷分布のモデルとして,

$$g_d(x)=\begin{cases}k/d & (-d\leq x<0)\\ (1-k)/d & (0\leq x\leq d)\end{cases}\tag{10}$$

を考える．k は非対称性を表すパラメータで, $k=1/2$ が対称の場合である．式 (7), (8) から, 球殻中心の電場 $E(a)$ と平均電場 $\bar{E}$ はそれぞれ,

$$E(a)=2k\frac{E_{\rm out}}{2},\quad \bar{E}=\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{E_{\rm out}}{2}\tag{11}$$

となり, どちらも k に依存する．よって, 分布によってどのような値にもなる．しかし, すでに式 (7), (9) で示したように, 面に働く圧力 p や外表面での電場 $E(a+d)$ は k には全く依存しない．（パーセルの教科書 [7] の図 2.13 には非対称な電荷分布の例が載っているが, 残念ながら, その力に関する議論は見当たらない．）

球面上での電場を球面の各部からの寄与の積分として求める方法は文献 [2] に詳しい．文献 [1] でも式 (1), (4) などに関して同様の計算を行っていると思われる．これらの方法によれば, 球面上の電場

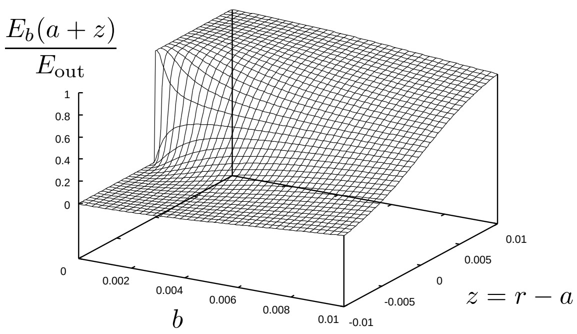

図 2: 半径 b の穴を空けた場合の面付近の電場

は $E_{out}/2$ と定まるように見えるが, 文献 [2] でも指摘されているように, 実は問題がある. 球面上では $r = a$ が成り立つとして, 文献 [2] の被積分関数 (8) の第 2 項 $(r^2 - a^2)/R^2$ をただちに 0 とおき, 因子 (1/2) を得ている. しかし, 積分区間の端が $R = 0$ に相当しており, 被積分関数が発散している. このような場合には極限のとり方に注意を払う必要がある. そこで, 角度 θ に関する積分範囲の下限を特異点の $\theta = 0$ ではなく $\theta = \beta\,(> 0)$ としておく. これは球面に半径 $b = a \sin\beta\,(\ll a)$ の小さい穴を空けることに相当する. 積分によって得られる電場は

$$E_b(a+z) \sim \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}}\right)\frac{E_{out}}{2}. \qquad (12)$$

となる. ここで $z = r - a$ ($|z| \ll a$) は球面からの距離である.

図 2 に示すように, 式 (12) は $b = z = 0$ において特異性を示す. $z \neq 0$ の場合には, 最初から $b = 0$ としておけばよく, $E(a+0) = E_{out}$, $E(a-0) = 0$ が簡単に求まる. 一方, $z = 0$ の場合は, 式 (12) から, $E(a) = E_{out}/2$ と定まるように見える. しかし, 面上での電場は正確には $E_b(a+z)$ の $b \to 0$, $z \to 0$ の極限として求めるべきものであり, この極限は b, z をどのようにゼロに近づけるかによって値が異なる. 実際, $z = hb$ (h は定数) を保ちながら極限をとると,

$$\lim_{\substack{b,z\to 0\\ z=hb}} E_b(a+z) = \left(1 + \frac{h}{\sqrt{h^2+1}}\right)\frac{E_{out}}{2} \qquad (13)$$

のように, 定数 h によって異なった値に収束させることができる. 実際, 面の両側での値の中間の任意の値を得ることができる. 式 (10) に対する $E(a)$ や $\bar{E}$ の不定性と類似の状況になっている. $r = a$ が不連続点であるゆえに, 計算手続きの工夫によって, 球面上の電場を E_{out} にせよ,[2] $E_{out}/2$ にせよ,[1] 随意に定めることができる. なお, 小穴を空けるのは自身の寄与を除くためという説明がなされるが, 実際は $z = 0$ での特異性を軟化させる手段に過ぎない.

5　おわりに

電荷分布の微小な厚さを考慮した解析によって, 球面のすぐ外側や内側の電場, 球面に働く力は, 電荷分布の形によらず確定するロバストな量であるのに対して, 球殻内の特定の位置の電場や, 厚さにわたって平均された電場は, 電荷分布の形に依存する不定な量であり, 一意に決めることはできないことを明らかにした. 厚さを 0 にする極限操作においては, 分布に依存する量は意味を失うので, これらの極限値としての "球面上の電場" は定義できないのである. また, 積分による電場の計算においても同様の不定性が現れていることが分かった.

球面 $r = a$ についてガウスの法則を適用することは, 電場 (電束密度) の値が定まっていないので不可能である. これはガウスの法則の破綻や適用限界を意味するものではない. 球殻の厚さが認識できるミクロな立場では任意の半径の球面に対して成り立っている. しかし, 厚さを 0 と見るマクロな立場では, ガウスの法則を適用すべき, 面上の電場や面の内側の電荷量を定めることができないのである.

式 (1) を眺めていると, $r = a$ の場合をつい書き足したくなるものである. しかし, 本来定義しえない "球面上の電場" を定義することには, 蛇足以上の思いがけない危険が潜んでいる. 実際, それぞれ一見正く見える複数の値が求められる, ガウスの法則の適用の仕方について専門家の間でも意見が一致しないような解釈を導入する, 数式の恣意的な極限

操作を行なう, 無限に薄い球面をちょうど半分の薄さで剥ぎ取るという神業を強いるなど, さまざまな不合理と混乱を引き起こしてしまっている.

結局, 式 (1) に対しては「$r = a$ での電界は, 階段の境目の高さのように, 定義できない量であり, また定義する必要もない.」という補足説明を加えるだけで十分ではないだろうか.

参考文献

1) 田中 秀数, 大学の物理教育 **12**-2 (2006) pp. 61–65.
2) 齊藤 嘉夫, 大学の物理教育 **12**-3 (2006) pp. 140–143.
3) 川村 清, 大学の物理教育 **12**-3 (2006) pp. 144–145.
4) 箕輪 弘章, 宮台朝直, 大学の物理教育 **12**-3 (2006) p. 173.
5) J.M. Aguirregabiria *et al.*, Am. J. Phys. **70**-2 (2002) p. 180–185.
6) デルタ関数に収束する非対称関数列の例は http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html にいくつか載っている.
7) E.M. パーセル (飯田 修一 監訳), バークレー物理学コース 2 電磁気学 (上) (丸善, 1970) pp. 60–63.

連絡先 Email: `kitano@kuee.kyoto-u.ac.jp`

大学の物理教育 Vol. 13, No. 1, pp. 45–48 (2007) に掲載